

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Рабочая тетрадь

по курсу

“Дифференциальное исчисление функции одной переменной”

Практикум по математике

для студентов бакалавриата очной формы обучения

студента *первого* курса _____ группы

Ф.И.О.

Рязань

2020

Рецензент: Мамонов С.С., доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры математики и методики
преподавания математических дисциплин
Рязанского государственного университета
им. С.А. Есенина

О.В. Тихонова, Е.И. Коняева. Рабочая тетрадь по курсу “Дифференциальное исчисление функции одной переменной” Практикум по математике для студентов бакалавриата очной формы обучения; Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета – Рязань, 2020. – 65 с.

Рабочая тетрадь предназначена для студентов бакалавриата дневного отделения 1 курса всех направлений подготовки. Данное пособие содержит материал для проведения практических занятий и для организации самостоятельной работы студентов.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

© Рязанский институт (филиал)
Московского политехнического университета,
2020

© О.В. Тихонова, Е.И. Коняева
2020

**Занятие 1. Понятие производной. Геометрический и механический
смысл производной.**

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Что такое приращение аргумента и приращение функции? В чем состоит геометрический смысл отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?
2. Сформулируйте определение производной функции в точке.
3. Какую прямую называют касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$?
4. В чем состоит геометрический смысл производной? механический смысл производной?
5. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$

-
6. Запишите уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$

если $f'(x_0) \neq 0$, то _____

если $f'(x_0) = 0$, то _____

7. Вспомните таблицу производных. Допишите равенства.

1) $(x)' =$

10) $(\quad)' = \cos x$

2) $(\quad)' = 0$

11) $(\cos x)' =$

3) $(\sqrt{x})' =$

12) $(\quad)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' =$

13) $(\operatorname{ctg} x)' =$

5) $(x^m)' =$

14) $(\quad)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $(\quad)' = e^x$

15) $(\arccos x)' =$

7) $(a^x)' =$

16) $(\operatorname{arctg} x)' =$

$$8) \left(\frac{1}{x} \right)' =$$

$$17) (\operatorname{arccotg} x)' =$$

$$9) (\log_a x)' =$$

8. Сформулируйте основные правила дифференцирования

$$1) (\tilde{n} \cdot u)' =$$

$$2) (u \pm v)' =$$

$$3) (u \cdot v)' =$$

$$4) \left(\frac{u}{v} \right)' =$$

1.1. Исходя из определения производной, найти производную функций:

$$а) y = 4x^3 - 1$$

1. Дадим x приращение _____, тогда y получит приращение

$$\Delta y =$$

2. Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

3. Найдем предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow$ _____

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0}$$

$$б) y = \frac{1}{e^x + 1}$$

1. Дадим x приращение _____, тогда y получит приращение

$$\Delta y =$$

2. Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

3. Найдем предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow$ _____

1.2. Вычислить производную функции $y = \frac{1}{x^2}$ по определению.

1. Дадим x приращение _____, тогда y получит приращение

$$\Delta y =$$

2. Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

3. Найдем предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow ______$

1.3. Вычислите производные:

а) $(4x + \cos x)' =$

б) $(e^x \log_4 x)' =$

в) $\left(\frac{x \ln x}{e^x}\right)' =$

г) $(\sqrt[3]{x} - x \cdot \operatorname{arctg} x)' =$

д) $\left(\frac{3}{4}x \cdot \sqrt[3]{x}\right)' =$

е) $((x^2 + 2x + 2)e^{-x})' =$

ж) $(3x^3 \ln x - x^3)' =$

$$\text{з)} \left(\frac{2^{3x}}{3^{2x}} \right)' =$$

$$\text{и)} \left(x \ln x - \frac{x^3}{3} + \frac{\sin x}{x^2 + 2} \right)' =$$

1.4. Найдите производные функций:

$$\text{а)} y = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^4} + \frac{x^7}{\sqrt[4]{x}}$$

$$y' =$$

$$\text{б)} y = \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3} + \ln x$$

$$y' =$$

$$\text{в)} y = (x^3 + 2^x) \cdot \operatorname{tg} x$$

$$y' =$$

$$\text{г)} y = x^3 \log_2 x + \frac{3}{4} \operatorname{ctg} x$$

$$y' =$$

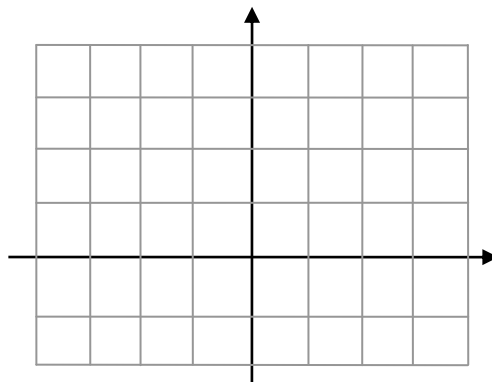
$$\text{д)} z = (\sqrt{y} + 1) \arcsin y$$

$$z' =$$

$$\text{е)} z = \frac{\cos x}{x^4 + \ln x}$$

$$z' =$$

1.5. Чему равен тангенс угла наклона касательной параболы $y = \frac{x^2}{2}$ к оси Ox в точке с абсциссой $x_1 = -1$? Выполните чертеж.



1.6. Для кривой $y = \frac{x^2}{2}$ определить знак производной в точках $x_0 = 1; 2; -0,5; 0$. (Использовать чертеж к предыдущей задаче).

1.7. В какой точке $M_0(x_0, y_0)$ касательная к кривой $y = e^x$ образует угол 45° с осью Ox ?

1.8. Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^2 - x$ в точке $x_0 = 0$.

1.9. Найти точки, в которых касательная к графику гиперболы $y = \frac{1}{x}$ параллельна прямой $y = -\frac{1}{4}x + 3$

1.10. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ перпендикулярна прямой $y = -\frac{x}{2} + 5$.

1.11. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox .

1.12. Закон движения точки по оси Ox есть $x = 3t - t^3$. Найти скорость движения точки для моментов времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Найдем зависимость скорости от времени: $v(t) =$

Вычислим скорость движения в указанные моменты времени:

1.13*. Точка движется по гиперболе $y = \frac{10}{x}$ так, что ее абсцисса x растет равномерно со скоростью 1 ед. в сек. С какой скоростью изменяется ее ордината, когда точка проходит положение $(5; 2)$?

Занятие 2. Дифференцирование сложной функции. Производная показательно – степенной функции.

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ – в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ в точке x_0 вычисляется по формуле $y'(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Логарифмической производной от функции $y = f(x)$ называется:

- а) логарифм от производной этой функции;
- б) производная от логарифма этой функции;
- в) логарифм от произведения этой функции на себя;
- г) логарифм от произведения этой функции на производную;
- д) логарифм от частного этой функции на производную.

3. Запишите формулу логарифмической производной $\underline{\hspace{2cm}}$

4. Какие из следующих функций являются показательно-степенными?

а) $y = (5 + \sqrt{2})^{\sin x}$

г) $y = (\cos 4x)^{\ln 2x}$

б) $y = (\ln x)^{\sqrt{x}}$

д) $y = (x^2 + 1) \cdot 3^x$

в) $y = 2^{x \sin^4 3x}$

е) $y = (x + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

5. Производная показательно-степенной функции $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ вычисляется по формуле $y' = \underline{\hspace{2cm}}$

2.1. Найдите производные следующих функций:

а) $(\sin^3 x)' =$

б) $(\sin x^3)' =$

$$\text{в)} (\sin 3x)' =$$

$$\text{г)} (tg\sqrt{x})' =$$

$$\text{д)} (\sqrt{tgx})' =$$

2.2. Найдите производные следующих функций:

$$\text{а)} y' = (\ln \arcsin 6x)' =$$

$$\text{б)} y' = \left(\frac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}} \right)' =$$

$$\text{в)} y' = (3^{tgx} \cdot \sin 5x)' =$$

$$\text{г)} y' = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1+x\cos 2x}} \right)' =$$

$$\text{д)} y' = \left(\frac{1}{\ln(1 + \arctg(e^{-x}))} \right)' =$$

$$\text{е) } y' = \left(\arccos \sqrt{x \ln^2 x - 1} \right)' =$$

2.3. Найдите производные функций:

$$\text{а) } y = \cos 5x - 7^{3x-1}$$

$$y' =$$

$$\text{б) } y = \sqrt[3]{(1-3x)^2} + e^{\operatorname{ctg} x}$$

$$y' =$$

$$\text{в) } y = \sin^9 \left(\frac{x}{2} \right) + \log_6 (\sin 4x)$$

$$y' =$$

$$\text{г) } y = 3^{x^2} \cdot \sqrt{x^3 - 5x}$$

$$y' =$$

$$\text{д) } y = \frac{1}{\arcsin \sqrt{\operatorname{tg} x}}$$

$$y' =$$

$$\text{е) } y = \sin(2e^x + 1) \cdot e^{2\sin x + 1}$$

$$y' =$$

2.4. Найдите производную функций:

а) $y = x^{\sin x}$

1. Прологарифмируем заданную функцию:

2. Преобразуем функцию, используя свойство логарифмов:

3. Дифференцируем получившееся равенство:

$$(\ln y)' =$$

$$\frac{y'}{y} =$$

4. Умножая полученное равенство на y , находим производную:

$$y' = y \cdot$$

5. Подставляем исходное значение y :

$$y' =$$

б) $y = x^{\ln x}$

1. Прологарифмируем заданную функцию:

2. Преобразуем функцию, используя свойство логарифмов:

3. Дифференцируем получившееся равенство:

$$(\ln y)' =$$

$$\frac{y'}{y} =$$

4. Умножая полученное равенство на y , находим производную:

$$y' = y \cdot$$

5. Подставляем исходное значение y :

$$y' =$$

в) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

1. Прологарифмируем заданную функцию:
2. Преобразуем функцию, используя свойство логарифмов:
3. Дифференцируем получившееся равенство:
4. Умножая полученное равенство на y , находим производную:
5. Подставляем исходное значение y :

2.5. Вычислите производные:

а) $y = (\arccos x)^{\operatorname{arctg} x}$

б) $y_1 = 3^{tgx}$

в) $y_2 = 3x^{tgx}$

2.6. Найдите производную функций:

а) $y = \frac{(x-1)^3 \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$

1. Прологарифмируем заданную функцию:

$$\ln y = \ln \frac{(x-1)^3 \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}},$$

2. Преобразуем функцию, применяя свойства логарифмов:

3. Дифференцируем полученное равенство и выражаем y'

$$\text{б)} \quad y = \frac{(1-x^2)\cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}}$$

1. Прологарифмируем заданную функцию:

2. Преобразуем функцию, применяя свойства логарифмов:

3. Дифференцируем полученное равенство и выражаем y'

$$\text{в)} \quad y = \sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x+3)}{(x-3)^3}}$$

1. Прологарифмируем заданную функцию:

2. Преобразуем функцию, применяя свойства логарифмов:

3. Дифференцируем полученное равенство и выражаем y'

2.7. Используя формулу для вычисления производной показательной функции, найти y' :

а) $y = (\cos x)^{\ln(x^2+1)}$

б) $y = (x^3 + 1)^{\arcsin x}$

в) $y = (x + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

Занятие 3. Дифференцирование функций, заданных неявно.

Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Функция, заданная неявно, определяется равенством _____

Чтобы найти производную этой функции, нужно _____

2. Функция, заданная параметрически, определяется уравнениями $\left\{ \right.$

Производная функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле:

3.1. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $x^3y + y^4 - x - 7 = 0$ в точке

$M_0(2; 1)$.

1. Дифференцируем заданное уравнение вида $F(x, y) = 0$ по переменной x , считая y функцией, зависящей от x :

2. Выражаем из полученного уравнения y' :

3. Вычисляем производную в точке $M_0(2; 1)$:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{M_0(2;1)} =$$

3.2. Вычислите производные $\frac{dy}{dx}$ для функций, заданных неявно:

а) $y + y^2 = x$

б) $y^3 + xy - x^3 = 1$

в) $x^3 + y^3 = \sin(x - 2y)$

г) $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$

3.3. Составить уравнение касательной к кривой $tg(xy) = x - y^2 + 4$ в точке $M_0(0;2)$.

Уравнение касательной имеет вид _____

По условию, $y(x_0) =$, $x_0 =$

Найдем $y'(x_0)$.

1) Дифференцируем уравнение кривой:

2) Находим производную неявной функции:

3) Вычисляем значение производной в точке $M_0(0; 2)$

$$y' \big|_{M_0(0;2)} =$$

Составим уравнение касательной:

3.4. Найти производную от неявных функций:

а) $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$

б) $\arcsin \frac{x}{y} = y \ln x$

3.5. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$,

проведенной в точке $M(-9; -8)$.

Уравнение касательной имеет вид _____

По условию, $y(x_0) =$, $x_0 =$

Найдем $y'(x_0)$

Составим уравнение касательной

3.6*. Найти угол, под которым пересекаются кривые $y = \frac{8}{x}$ и $x^2 - y^2 = 12$.

Углом между кривыми в точке их пересечения $M_0(x_0; y_0)$ называется _____

Тангенс этого угла находится по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad (1)$$

где $k_1 = y'_1(x_0)$; $k_2 = y'_2(x_0)$ – угловые коэффициенты касательных к кривым в точке $M_0(x_0; y_0)$.

1. Находим точки пересечения кривых:

Таким образом, точки пересечения $M_1(\quad); M_2(\quad)$.

2. Найдем значения производных $y'_1(x)$ и $y'_2(x)$ в точках пересечения.

3. Подставляем найденные значения в формулу (1):

$$\operatorname{tg} \varphi_1 =$$

$$\text{тогда } \varphi_1 =$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 =$$

$$\text{тогда } \varphi_2 =$$

3.7. Найти производную для функций, заданных параметрически

$$\text{а) } \begin{cases} x(t) = t^3 + 3t + 1 \\ y(t) = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases},$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = e^{-t} \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{cases}$$

3.8. Составить уравнение нормали к кривой $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ в точке,

соответствующей значению параметра $t_0 = \frac{3\pi}{4}$.

Уравнение нормали имеет вид: _____

1. Находим производную y'_x :

$$y'_x =$$

2. Вычисляем значение найденной производной в точке, соответствующей значению параметра $t_0 = \frac{3\pi}{4}$:

$$y'_x\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$

3. Находим значения $x(t)$ и $y(t)$ при $t_0 = \frac{3\pi}{4}$:

$$x\left(\frac{3\pi}{4}\right)=$$

$$y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=$$

4. Подставляем найденные значения в уравнение нормали и получаем искомое уравнение:

3.9. Найти производную для функций, заданных параметрически

а) $x = t - \operatorname{arctgt}, \quad y = \frac{t^3}{3} + 1$

б) $x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \quad y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

3.11. Составить уравнения касательной и нормали к астероиде

$x = \sqrt{2} \cos^3 t$, $y = \sqrt{2} \sin^3 t$, проведенных в точке, для которой $t = \frac{\pi}{4}$.

1) Уравнение касательной имеет вид _____

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

Вычислим производную $y'(x)$:

Вычислим значение производной при $t = \frac{\pi}{4}$:

$$y'(x_0) =$$

Составим уравнение касательной

2) Уравнение нормали имеет вид _____

Занятие 4-5. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков. (3 часа)

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Что называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 ?
2. В чем заключается геометрический смысл дифференциала?
3. Если приращение Δx аргумента близко к нулю, то $\Delta y \approx \underline{\hspace{2cm}}$, откуда получаем формулу для приближенного вычисления значения функции в точке $x_0 + \Delta x$: $\underline{\hspace{4cm}}$
4. Что понимается под производной второго порядка для функции $y = f(x)$?
5. Вторая производная функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле:

4.1. Найдите дифференциал функции:

а) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

$dy =$

б) $y = e^{x^3}$

$dy =$

4.2. Вычислите дифференциал функции $y = f(x)$ в заданной точке x_0 , если в обоих случаях приращение $\Delta x = 0,1$:

а) $y_1 = \ln x, x_0 = 2,$

$dy_1(x_0, \Delta x) = y'_1(x_0) \cdot \Delta x =$

$dy_1(2; 0,1) =$

б) $y_2 = \sqrt{x+1}, x_0 = 3$

$dy_2(x_0, \Delta x) = y'_2(x_0) \cdot \Delta x =$

$dy_2(3; 0,1) =$

4.3. Найдите дифференциал функции.

а) $d(x^2 \ln x) =$

б) $d((x^3 - x) \operatorname{tg} x) =$

4.4. Вычислить приближенное значение $\arcsin 0,51$

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$.

Применяем формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx$

Пусть $x_0 = \underline{\hspace{1cm}}$, $\Delta x = \underline{\hspace{1cm}}$ тогда

4.5. Найти приближенно значение площади круга, радиус которого равен 2,005 м.

Площадь круга выражается формулой $S =$

Пусть $R_0 = \underline{\hspace{1cm}}$, $\Delta R = \underline{\hspace{1cm}}$, имеем:

$$\Delta S \approx dS =$$

Значит, приближенное значение площади круга составляет:

$$S \approx$$

4.6. Найти приближенное значение:

а) $\sqrt[4]{15,8}$

Рассмотрим функцию

б) $\text{Intg} 47^{\circ}15'$

Рассмотрим функцию

4.7. Найдите вторую производную функций в указанных точках:

а) $y = \sin 3x, x = \frac{\pi}{6}$

б) $y = e^{x^2}, x_0 = 0$

в) $y = \text{tg} x, x_0 = \pi$

4.8. Точка движется по прямолинейному закону $S(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + 5t - 2$.

В какой момент времени ускорение равно нулю?

4.9. Показать, что функция $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ удовлетворяет уравнению $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

Находим $y' =$

$y'' =$

Подставим полученные выражения в уравнение

4.10. Найти $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ для функции $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0.5x + 7$.

$y' =$

$y'' =$

$y''' =$

$y^{(4)} =$

$$y^{(5)} =$$

$$y^{(6)} =$$

...

$$y^{(n)} =$$

4.11. Найти $y^{(n)}$ для функции $y = \ln x$.

$$y' =$$

$$y'' =$$

$$y''' =$$

$$y^{(4)} =$$

$$y^{(5)} =$$

...

$$y^{(n)} =$$

4.12. Для функции $y = 5^{3x}$ в точке $x = 0$ найти производную 20-го порядка.

Находим:

$$y' =$$

$$y'' =$$

$$y''' =$$

...

$$y^{(20)} =$$

$$y^{(20)}(0) =$$

4.13. Найти производные второго порядка:

$$\text{a) } \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

Воспользуемся формулой

$$6) \begin{cases} x = \arccos \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t - t^2} \end{cases}$$

В). $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1-t} \end{cases}$

4.14*. Найти производную n -го порядка $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$

4.15. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = x(\ln x - 1)$.

4.16*. В точке $M_0(1, 2)$ найти дифференциалы первого и второго порядков функции, заданной неявно уравнением $x^3 + 2y^2 + xy - 11 = 0$.

1) Найдем дифференциал первого порядка.

1. Дифференцируем уравнение по x , считая y функцией, зависящей от x :

2. Выражаем y' :

$$y' =$$

3. Вычислим значение производной в точке $M_0(1, 2)$:

$$y'|_{M_0(1;2)} =$$

4. Находим $dy(M_0) =$

2) Найдем дифференциал второго порядка.

1. Найдем вторую производную, дифференцируя y' по x :

$$y'' =$$

2. Вычислим значение второй производной в точке $M_0(1, 2)$:

$$y''|_{M_0(1;2)} =$$

3. Находим $d^2y(M_0) =$

4.17. Придумайте функцию $y = y(x)$, вторая производная которой равна:

а) $y'' = x$

б) $y = \cos x$

в) $y'' = -\frac{1}{x^2}$

Занятие 5. Контрольная работа. (1 час)

Занятие 6. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций.

Вопросы для подготовки к занятию:

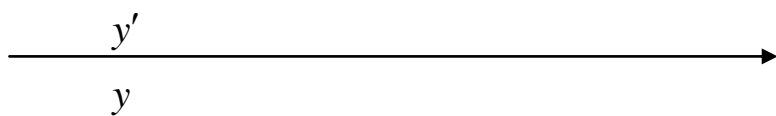
1. Сформулируйте определение возрастающей и убывающей функции на интервале $(a; b)$.
2. Сформулируйте достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале $(a; b)$.
3. При каком условии точка x_0 называется стационарной точкой?
4. Какие точки называются критическими?
5. Сформулируйте необходимое условие экстремума.
6. Запишите достаточные условия экстремума:
 - 1) Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-”, то x_0 — _____, если с “-” на “+”, то x_0 — _____
 - 2) Если $f'(x_0)=0$, $f''(x_0) \neq 0$, то функция в точке x_0 имеет экстремум, а именно максимум, если _____ и минимум, если _____.
 - 3) Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, ..., $f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, если _____, а именно, максимум при _____ и минимум при _____. Если же _____, то функция $f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет.

6.1. Найти интервал возрастания и убывания функции

$$y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7.$$

1. Область определения данной функции
2. Найдем производную функции
 $y' =$
3. Найдем стационарные (критические) точки функции, являющиеся корнями уравнения $y' = 0$

4. Исследуем знак производной



Функция возрастает на интервалах

Функция убывает на интервалах

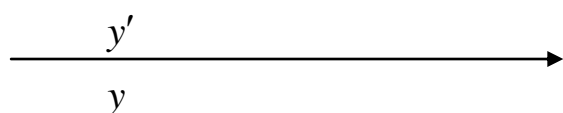
6.2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2 e^{-x}$

1. Область определения данной функции

2. Найдем производную данной функции

$$y' =$$

3. Найдем критические точки функции



В критической точке $x = \underline{\hspace{2cm}}$, производная меняет знак с “ $\underline{\hspace{2cm}}$ ” на “ $\underline{\hspace{2cm}}$ ”, поэтому $x = \underline{\hspace{2cm}}$ является точкой локального $\underline{\hspace{2cm}}$

Тогда, $y_{\text{--}} = y(\quad) =$

В критической точке $x = \underline{\hspace{2cm}}$, производная меняет знак с “ $\underline{\hspace{2cm}}$ ” на “ $\underline{\hspace{2cm}}$ ”, поэтому $x = \underline{\hspace{2cm}}$ является точкой локального $\underline{\hspace{2cm}}$

Тогда, $y_{\text{--}} = y(\quad) =$

6.3. Построить эскиз графика функции $y = x^3 - 2x^2 - 15x$ с помощью производной первого порядка.

1. Найдем область определения данной функции $D(y) =$

2. Исследуем функцию на четность, нечетность

$$y(-x) =$$

3. Исследуем функцию на непрерывность.

4. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

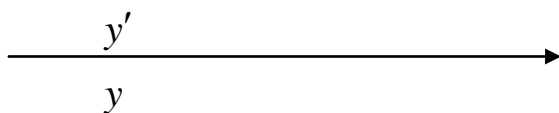
С Ox :

С Oy :

5. Найдем промежутки возрастания и убывания, экстремумы функции

$$y' =$$

Решаем уравнение: $y' = 0$

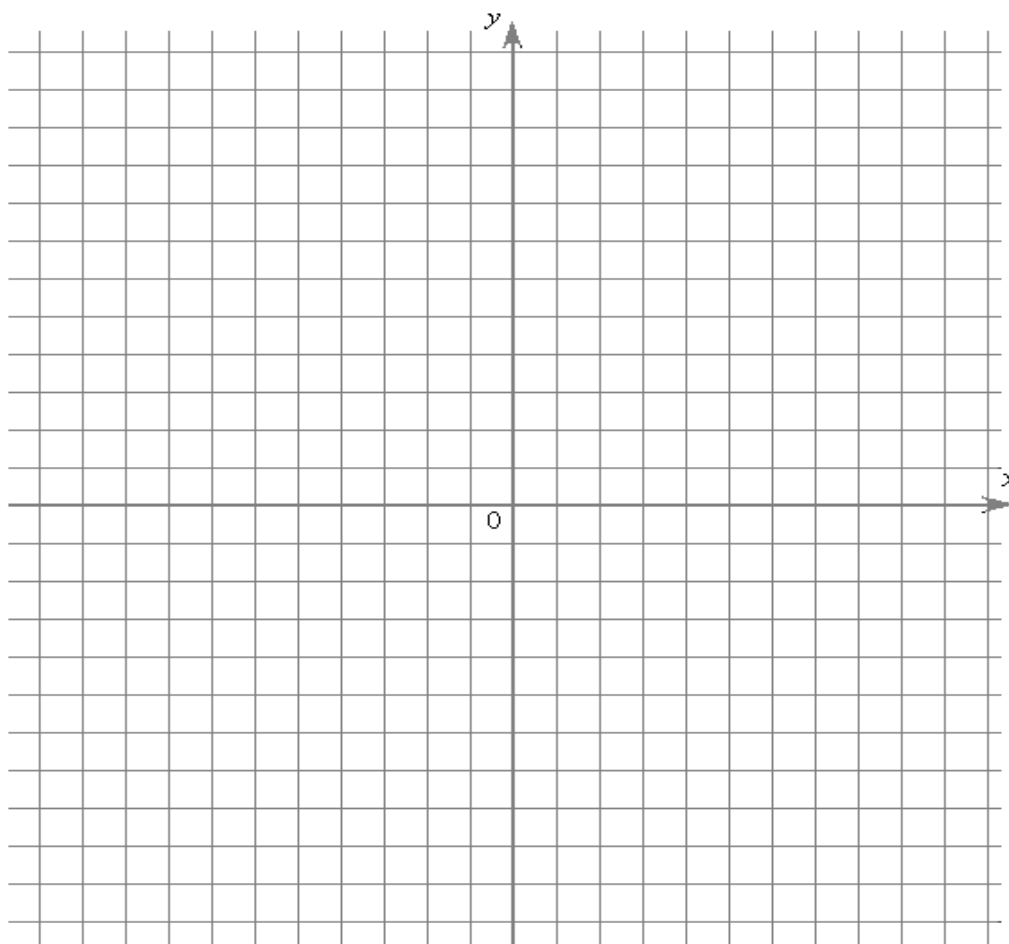


Найдем значение функции в критических точках.

$$y_{\max} =$$

$$y_{\min} =$$

6. Строим график данной функции:



6.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 1$ на отрезке $[1; 9]$.

1. Вычисляем производную данной функции: $y' =$
2. Находим стационарные точки

3. Среди стационарных точек выбираем те, которые принадлежат отрезку $[1; 9]$. Это точка

4. Вычисляем значения функции в стационарных точках и на концах отрезка.

$$y(1) =$$

$$y(9) =$$

$$y(\quad) =$$

5. Сравнивая полученные значения, выбираем наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Наибольшее значение функции равно \quad , и достигается в точке $x = \quad$,
наименьшее значение равно \quad и достигается в точке $x = \quad$.

6.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 + \frac{16}{x}$ на отрезке $[1; 4]$.

6.6. В данный шар вписать конус с наибольшим объемом.

Пусть h – высота конуса, R – радиус шара.

6.7. Кусок проволоки длиной l согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.

Пусть a – сторона прямоугольника. Тогда вторая сторона

Площадь прямоугольника $S(a) =$

Задача сводится к исследованию функции $S(a)$ на максимум при $a > 0$.

$S'(a) =$

Функция принимает наибольшее значение при $a =$

Вторая сторона прямоугольника равна

6.8*. Открытый жестяной бак с квадратным основанием должен вмещать ν литров. При каких размерах на изготовление бака потребуется наименьшее количество жести?

Пусть x – сторона квадрата, являющегося основанием бака. Тогда высота бака равна $h =$

Рассмотрим функцию $f(x) =$

6.9. Исследовать поведение функции $y = x^3 + 3x - 6e^{x-1}$ в окрестности точки $x_0 = 1$ с помощью производных высших порядков.

Вычисляем значения производных высших порядков в точке $x_0 = 1$ до тех пор, пока не получим число, отличное от нуля.

$$y' =$$

$$y'(1) =$$

$$y'' =$$

$$y''(1) =$$

$$y''' =$$

$$y'''(1) =$$

$$y^{IV} =$$

$$y^{IV}(1) =$$

Так как $n = \underline{\hspace{1cm}}$ является четным (нечетным) числом, то в точке $x_0 = 1$ функция $\underline{\hspace{4cm}}$. Так как $\underline{\hspace{2cm}}$, то $x_0 = 1$ является точкой локального $\underline{\hspace{4cm}}$.

6.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ 2ex \ln x, & x > 0. \end{cases} \text{ на отрезке } [-1; 2].$$

Занятие 7. Направление вогнутости. Точки перегиба. Асимптоты.

Вопросы для подготовки к занятию:

1. При каком условии график функции $y = f(x)$ называется выпуклым (вогнутым) на интервале $(a; b)$?
2. Сформулируйте достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции.
3. При каком условии точка x_0 называется точкой перегиба? Критической точкой II рода?
4. Какая прямая называется асимптотой графика функции?
5. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если

6. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если существуют пределы

$$k =$$

$$b =$$

Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная асимптота при _____.

7.1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1. Область определения функции _____

2. Находим вторую производную

$$y' =$$

$$y'' = (y')' =$$

3. Находим критические точки II рода

Функция выпукла на интервалах

Функция вогнута на интервалах

Точки _____ являются точками перегиба данной функции.

7.2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$y = (1 + x^2)e^x.$$

1. Область определения функции

2. Находим вторую производную

$$y' =$$

$$y'' = (y')' =$$

3. Находим критические точки II рода

Функция выпукла на интервалах

Функция вогнута на интервалах

Точки _____ являются точками перегиба данной функции.

7.3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}.$$

1. Область определения функции

2. Находим вторую производную

$$y' =$$

$$y'' = (y')' =$$

3. Находим критические точки II рода

Функция выпукла на интервалах

Функция вогнута на интервалах

Точки _____ являются точками перегиба данной функции.

7.4*. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b, c , чтобы функция $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$ имела точки перегиба?

Находим вторую производную данной функции:

$$y' =$$

$$y'' =$$

Функция будет иметь точки перегиба, если

7.5*. При каком значении α функция $y = x^4 + \alpha \ln x$ имеет единственную точку перегиба при $x=1$?

7.6. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Построить эскиз графика.

1. Область определения функции _____.
2. В точке разрыва $x = \underline{\hspace{1cm}}$ функция терпит разрыв _____ рода, причем

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} =$$

Значит, прямая $x = \underline{\hspace{1cm}}$ является вертикальной асимптотой.

3. Проверим наличие наклонных асимптот. Находим асимптоты при $x \rightarrow +\infty$

$$k =$$

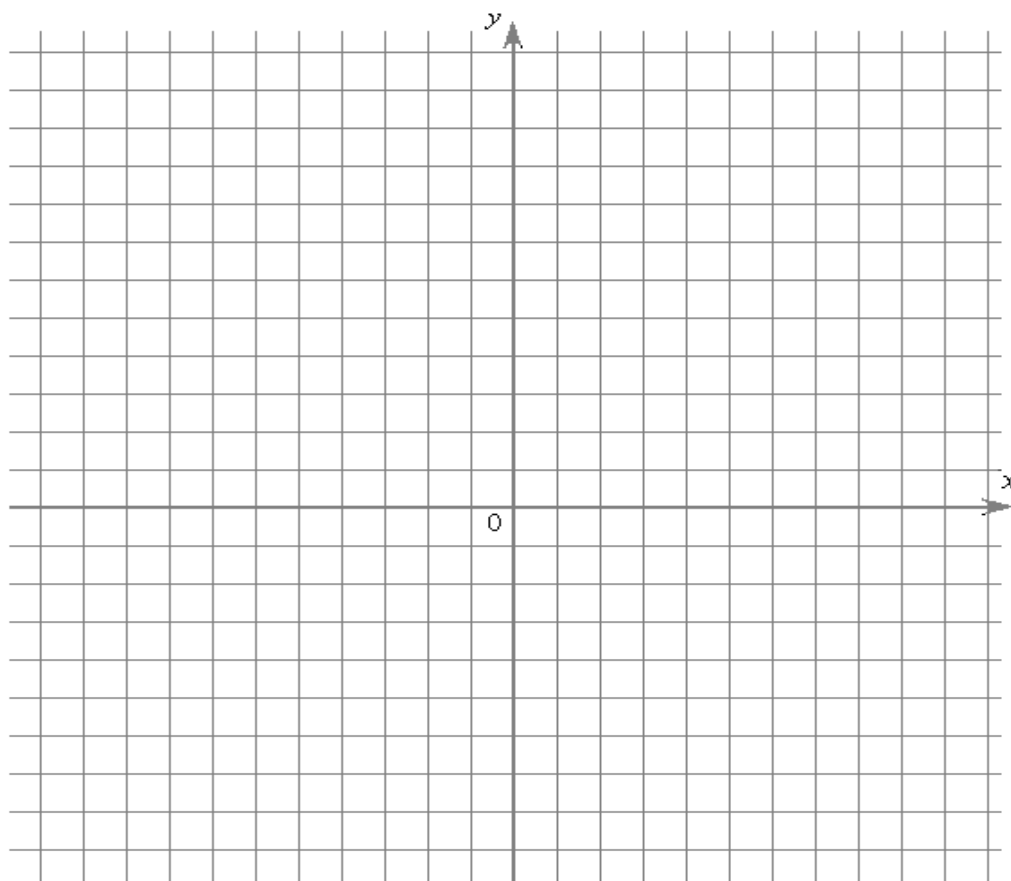
$$b =$$

Находим асимптоты при $x \rightarrow -\infty$.

$$k =$$

$b=$

4. Строим эскиз графика.



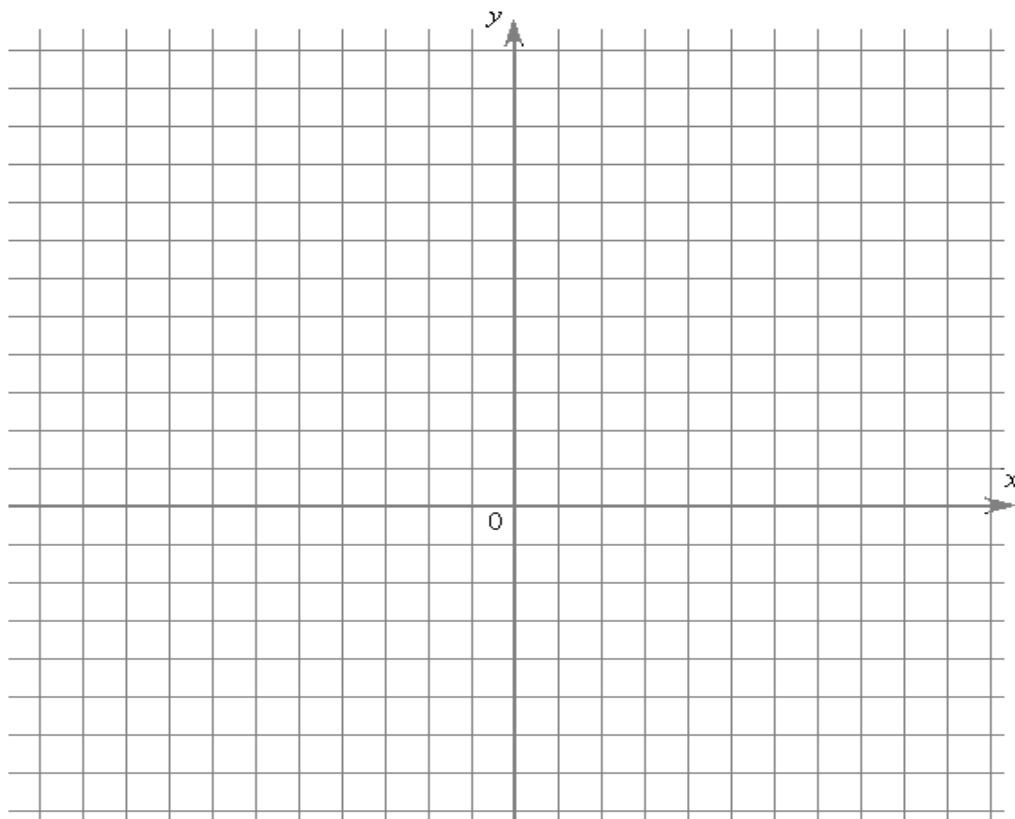
7.7. Найти асимптоты графика функции $y = e^{\frac{1}{x}}$. Построить эскиз графика.

1. Найдем область определения

2. Ищем вертикальные асимптоты. Точка разрыва _____

3. Ищем наклонные асимптоты.

4. Строим эскиз графика.



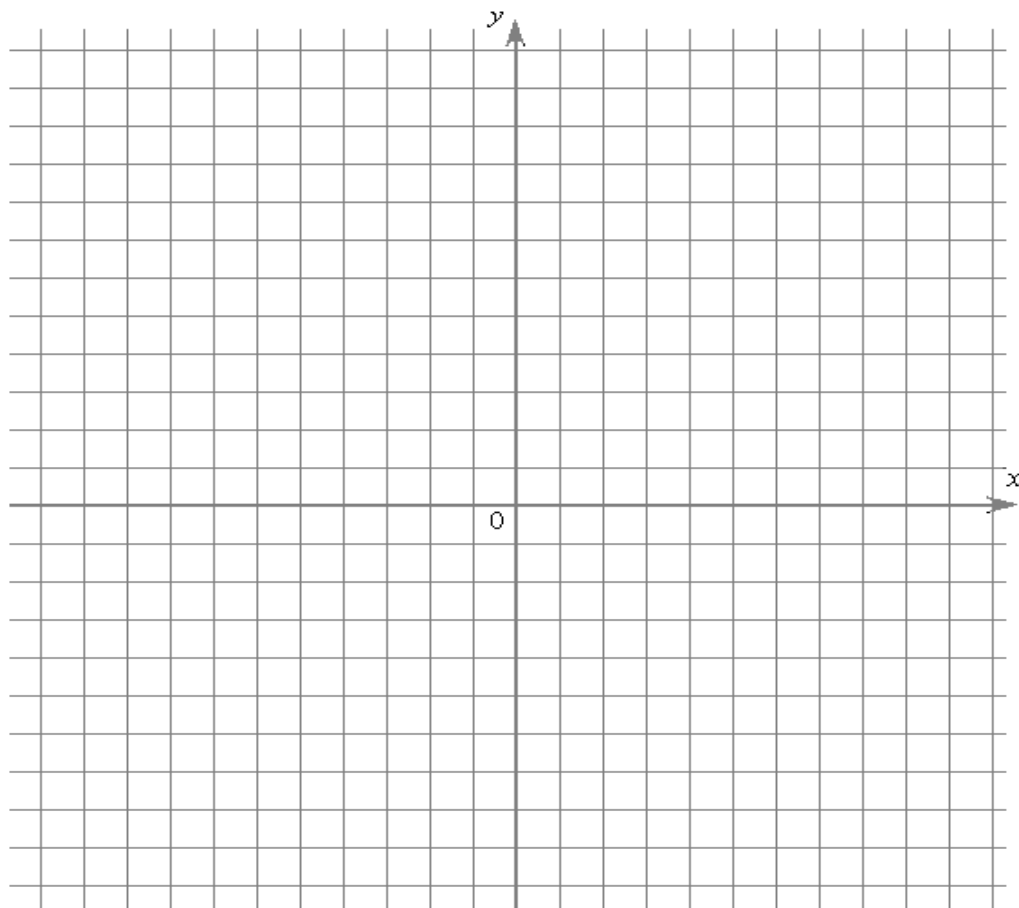
7.8. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 - 1}{x}$. Построить эскиз графика.

1. Найдем область определения

2. Ищем вертикальные асимптоты. Точка разрыва _____

3. Ищем наклонные асимптоты.

4. Строим эскиз графика.



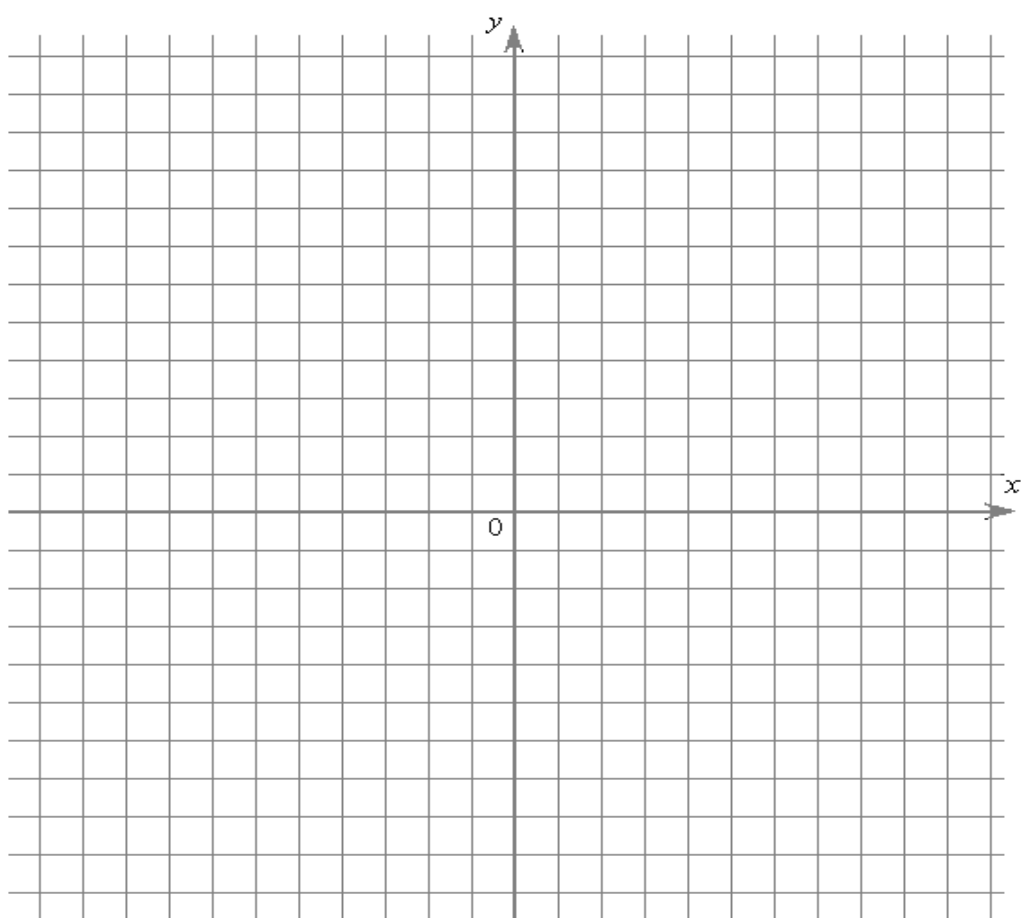
7.9. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$. Построить эскиз графика.

1. Найдем область определения

2. Ищем вертикальные асимптоты. Точка разрыва _____

3. Ищем наклонные асимптоты.

4. Строим эскиз графика.



Занятие 8. Исследование функций.

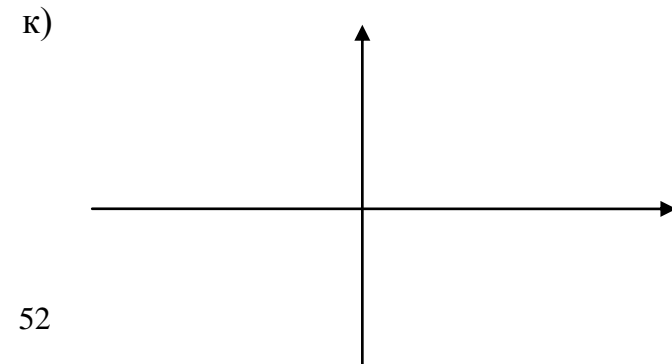
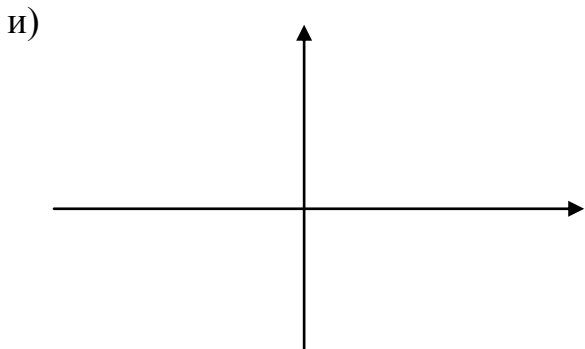
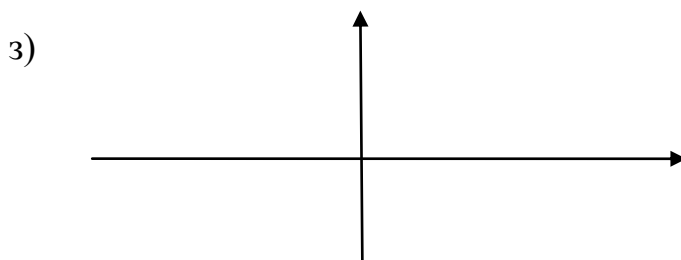
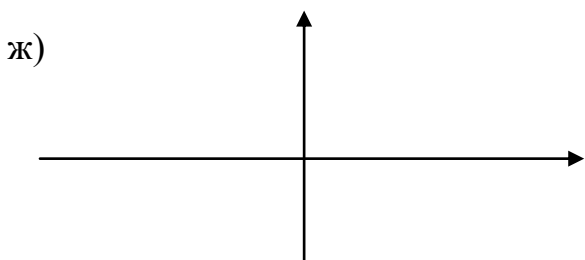
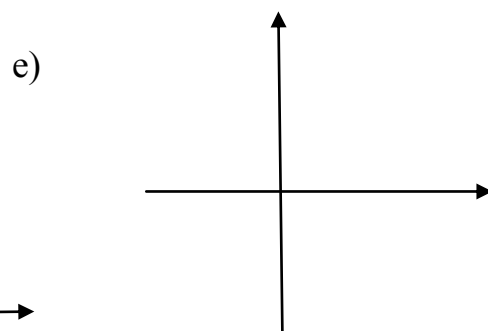
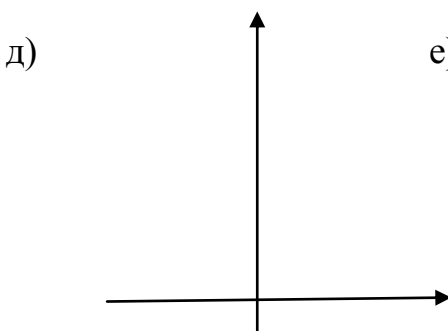
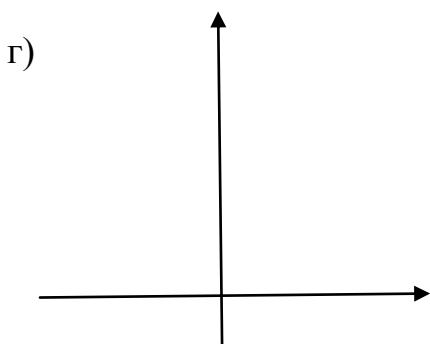
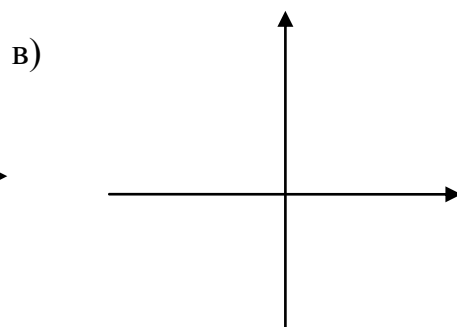
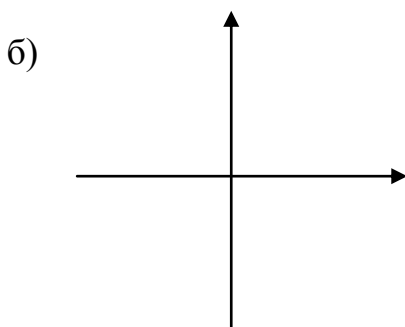
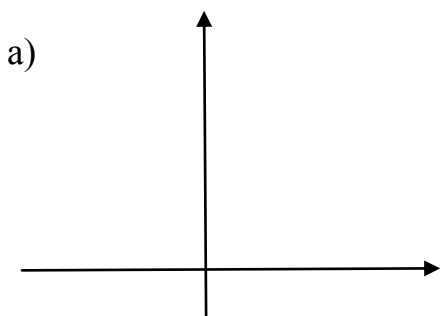
Вопросы для подготовки к занятию:

1. Постройте графики элементарных функций:

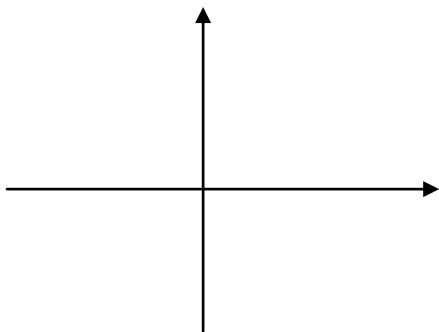
а) $y_1 = x^2$, $y_2 = \sqrt{x}$; б) $y_1 = x^3$, $y_2 = \sqrt[3]{x}$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \frac{1}{x^2}$; д) $y_1 = 3^x$, $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

е) $y_1 = \log_2 x$, $y_2 = \log_{\frac{2}{3}} x$; ж) $y = \sin x$; з) $y = \cos x$; и) $y = \operatorname{tg} x$; к) $y = \operatorname{ctg} x$;

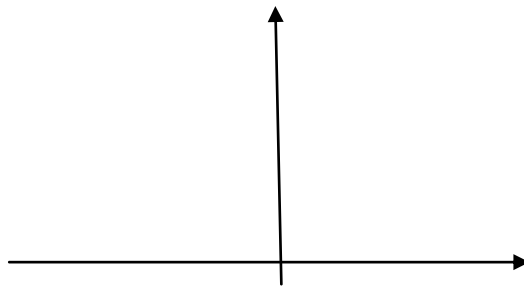
л) $y = \arcsin x$; м) $y = \arccos x$; н) $y = \operatorname{arctg} x$; о) $y = \operatorname{arcctg} x$.



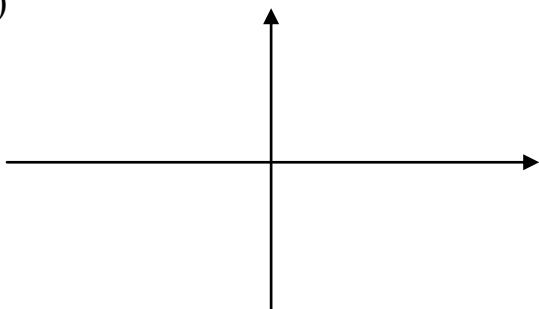
л)



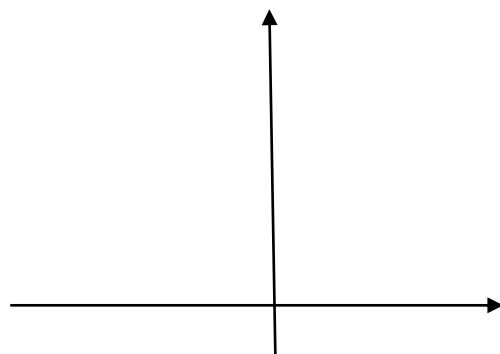
м)



н)



о)



8.1. Провести полное исследование функции $y = \frac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

1. Находим область определения функции

2. Проверим, является ли функция четной или нечетной.

$$y(-x) =$$

3. Находим вертикальные асимптоты.

Найдем точки разрыва и определим их род.

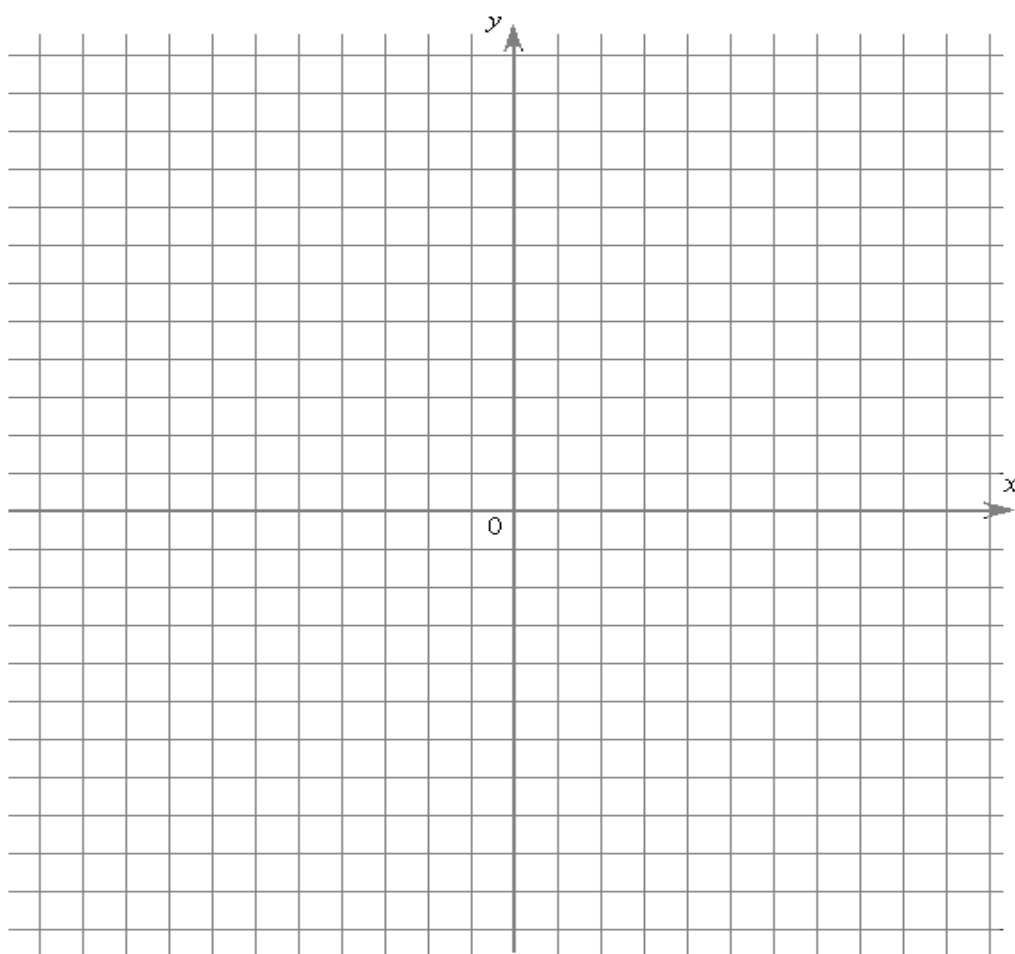
4. Находим наклонные асимптоты.

5. Находим точки пересечения графика с осями координат.

6. Находим интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции.

7. Находим интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

8. На основании полученных результатов строим график данной функции.



8.2. Провести полное исследование функции $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ и построить ее график.

1. Находим область определения

2. Проверим, является ли функция четной или нечетной. $y(-x) =$

$$y(-x) =$$

3. Находим вертикальные асимптоты.

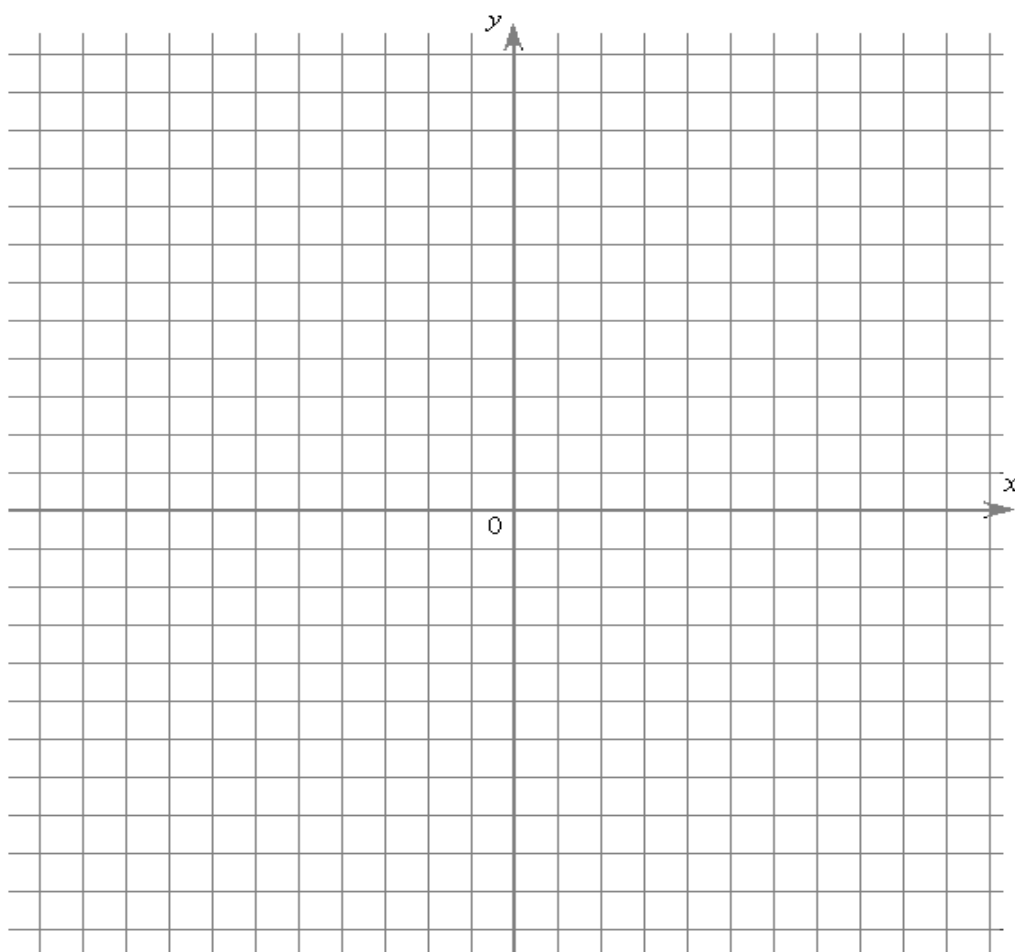
4. Находим наклонные асимптоты.

5. Находим точки пересечения графика с осями координат.

6. Находим интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции.

7. Находим интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

8. На основании полученных результатов строим график данной функции.



8.3. Провести полное исследование функции $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ и построить ее

график.

1. Находим область определения

2. Проверим, является ли функция четной или нечетной.

$$y(-x) =$$

3. Находим вертикальные асимптоты.

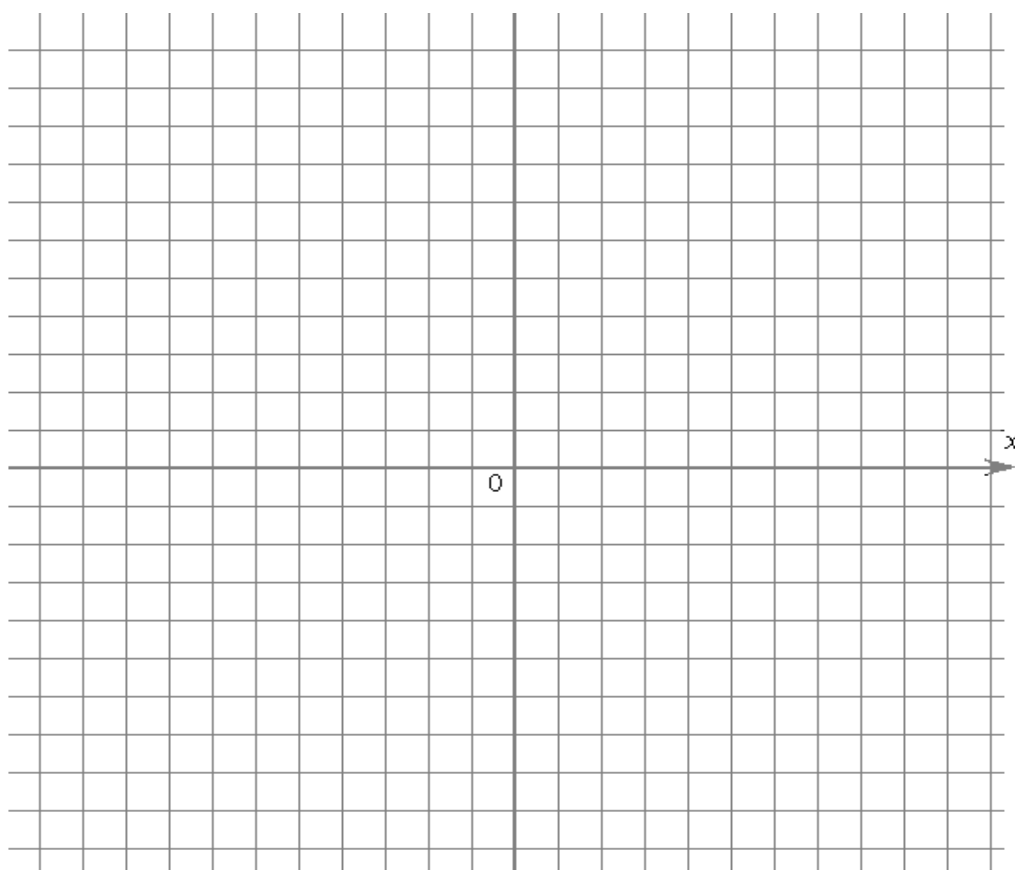
4. Находим наклонные асимптоты.

5. Находим точки пересечения графика с осями координат.

6. Находим интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции.

7. Находим интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

8. На основании полученных результатов строим график данной функции.



8.4. Провести полное исследование функции $y = \frac{\ln x}{x}$ и построить ее график.

1. Находим область определения

2. Проверим, является ли функция четной или нечетной.

$$y(-x) =$$

3. Находим вертикальные асимптоты.

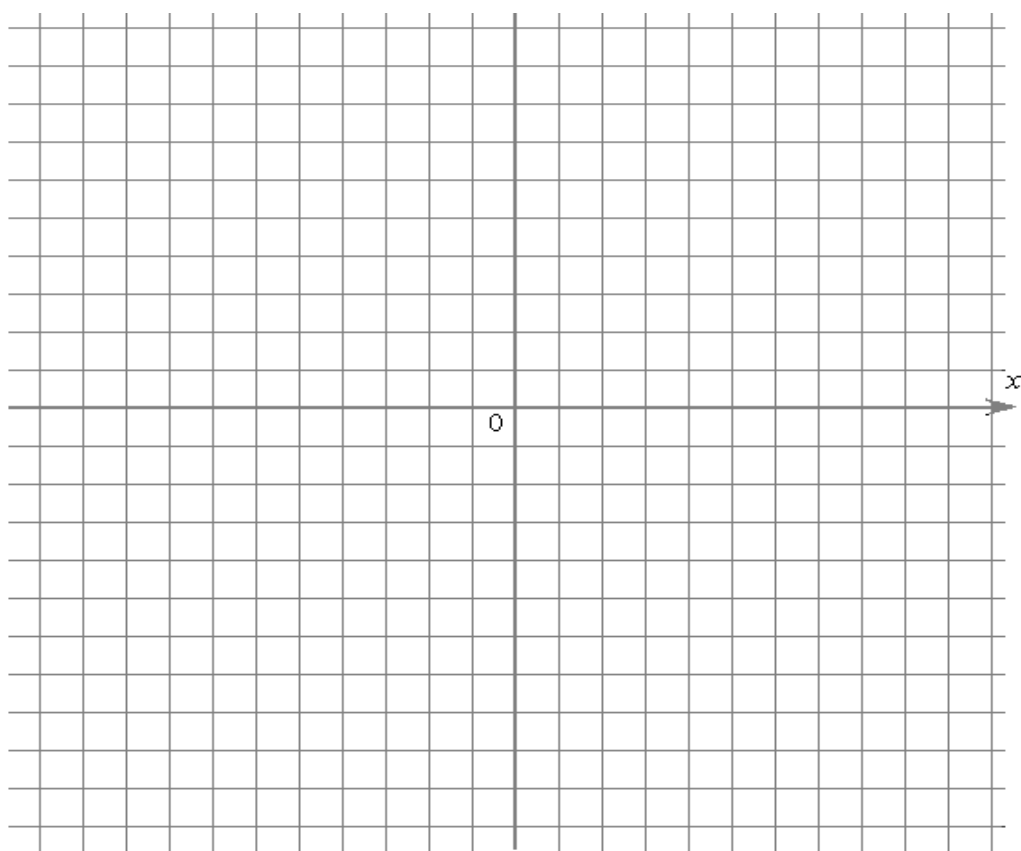
4. Находим наклонные асимптоты.

5. Находим точки пересечения графика с осями координат.

6. Находим интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции.

7. Находим интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

8. На основании полученных результатов строим график данной функции.



8.5. Провести полное исследование функции $y = x^2 e^{-x}$ и построить ее график.

1. Находим область определения

2. Проверим, является ли функция четной или нечетной.

$$y(-x) =$$

3. Находим вертикальные асимптоты.

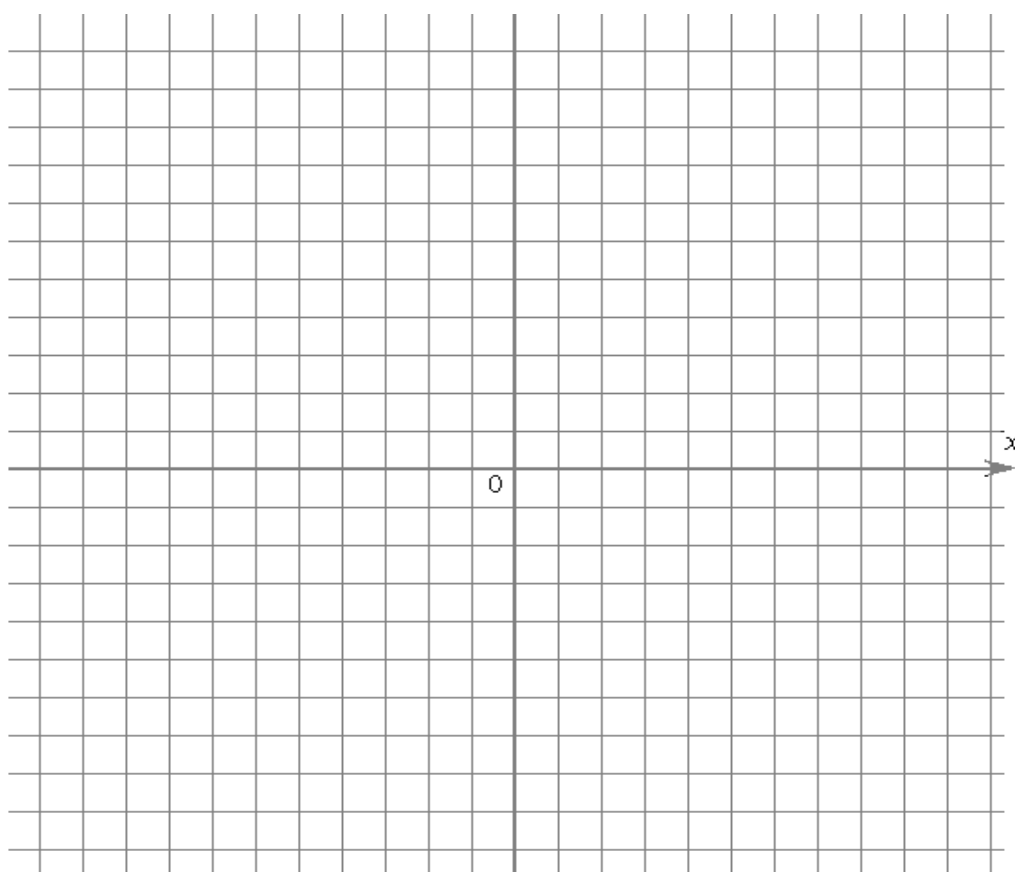
4. Находим наклонные асимптоты.

5. Находим точки пересечения графика с осями координат.

6. Находим интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции.

7. Находим интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

8. На основании полученных результатов строим график данной функции.



8.6. Провести полное исследование функции $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ и построить ее

график.

1. Находим область определения

2. Проверим, является ли функция четной или нечетной.

$$y(-x) =$$

3. Находим вертикальные асимптоты.

4. Находим наклонные асимптоты.

5. Находим точки пересечения графика с осями координат.

6. Находим интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции.

7. Находим интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

8. На основании полученных результатов строим график данной функции.

